المبدأ العامة في تحريك الجملة الميكانيكية

د.اسكندر عمجة

التحريك

نظري 14 4 11

16/11/2015

RBOHAMAK

فريق الكريات الحمراء التطوعي

المعادلات التفاضلية لحركة جملة مادية

نعد جملة مؤالفة من n جسيماً مادياً نختار منها $\mathrm{M_k}$ كتلته m_k يخضع لمجموعة من القوى الخارجية F_k^e

ومجموعة من القوى الداخلية F_k^i فإذا اكتسب الجسيم تسارعاً A_kكان:

$$\Sigma m_k A_k = F_k^i + F_k^e$$

بالتالي يكون الجملة:

$$m_1 A_1 = F_1^i + F_1^e$$

$$m_k A_2 = F_2^i + F_2^e$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$m_n A_n = F_n^i + F_n^e$$

بإسقاط هذه المعادلات على المحاور الإحداثية نحصل على المعادلات التفاضلية لحركة الجملة.

حركة مركز كتل جملة مادية

$$\Sigma m_k A_k = \Sigma F_k^i + \Sigma F_k^e$$

من علاقة مركز الكتل:

$$\Sigma m_k . r_k = M . r_G$$

حيث r_G متجه الموضع لمركز الكتل و$M = \Sigma m_k$ كتلة الجملة.

بالاشتقاق مرتين نحصل على العلاقة:

$$\Sigma m_k . A_k = M . A_G$$

باعتبار $\Sigma F_k^i = 0$ وبالتعويض في العلاقة السابقة:

$$\boldsymbol{M . A_G = \Sigma F_k^i}$$

وهي علاقة مركز الكتل ونصها: كتلة جسم م ركزة
في مركز كتلته مضروبة بتسارع مركز الكتلة
تساوي إلى مجموع القوى الخارجية المؤثرة في
كافة نقاط الجسم

- المعادلات التفاضلية لحركة مركز الكتل:

$$M . \ddot{X} = \Sigma F_{kX}^e \quad , \quad M . \ddot{Y} = \Sigma F_{kY}^e \quad , \quad M . \ddot{Z} = \Sigma F_{kZ}^e$$

يستخدم مبدأ حركة الكتل في حال:

1. إذا تحركت الجملة حركة انسحابية فإن دراسة حركة الجملة تؤول إلى دراسة مركز الكتلة فقط.
2. إذا كانت القوى الداخلية المؤثرة مجهولة.

كمية الحركة الخطية لجملة مادية

Qوهي المجموع الهندسي لكميات حركات أجزاء الجملة k:

$$Q = \Sigma q_k = \Sigma m_k V_k$$

$$\Sigma m_k V_k = M V_G \Rightarrow Q = M . V_G$$

نص العلاقة: كمية حركة جملة مادية تساوي إلى كتلة
الجملة مركزة في مركز الكتل بجداء سرعة هذا المركز

مبدأ الدفع وكمية الحركة لجملة مادية

$$\Sigma m_k A_k = F_k^i + F_k^e$$

$$F_k^i = 0$$

$$\Sigma m_k A_k = \Sigma F_k^e \Rightarrow \frac{d}{dt}\Sigma m_k V_k = \Sigma F_k^e \Rightarrow \boldsymbol{\frac{d}{dt} Q = \Sigma F_k^e}$$

مشتق كمية الحركة: إن مشتق كمية حركة جملة مادية بالنسبة للزمن يساوي المجموع الهندسي للقوى الخارجية المطبقة على هذه الجملة.

أما **علاقة تغيّر كمية الحركة** فتنتج عن ضرب طرفي العلاقة بdtثم مكاملتها مع اعتبار أنQ_0تمثل كمية حركة الجملة في اللحظةt_0 وQ_1تمثل كمية حركة الجملة في اللحظة t_1.

$$Q_1 - Q_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Sigma F_k^e \, dt$$

$$Q_1 - Q_0 = \Sigma I_k^e$$

وتكتب العلاقة بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{Q_1 = Q_0 + \Sigma I_k^e}$$

مبدأ تغير كمية الحركة لجملة:إن تغير كمية الحركة لجملة مادية خلال فترة زمنية $t_0 \to t_1$ تساوي المجموع الهندسي لدفوع القوى الخارجية المؤثرة على على هذه الجملة خلال هذه الفترة الزمنية.

حفظ حركة مركز الكتل وحفظ كمية الحركة لجملة

من علاقة مشتق كمية الحركة الخطية بالنسبة للزمن:

$$\frac{d}{dt} Q = \Sigma F_k^e \rightarrow \text{السوائل و الغازات}$$

ومن علاقة حركة مركز الكتل:

$$\boldsymbol{M.A_G = \Sigma F_k^e} \rightarrow \text{الأجسام الصلبة}$$

سؤال:

من العلاقتين السابقتين ،ماذا يحصل إذا انعدم مجموع القوى الخارجية المؤثرة على الجملة المادية أي $\Sigma F_k^e = 0$؟

الجواب: من العلاقة الأولى نجد:

$$dQ = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = const \quad \Rightarrow \quad Q_0 = Q_1$$

ومن العلاقة الثانية:

$$A_G = 0 \quad \Rightarrow \quad V_G = const \quad \Rightarrow V_{G_2} = V_{G\,1}$$

أي أن الجملة تحافظ على كمية حركتها؛فيتحرك مركز كتلها حركة مستقيمة منتظمة ،ويبقى ساكناً إذا كانت الجملة ساكنة

إذاً ماذا يحصل إذا لم ينعدم مجموع القوى الخارجية المؤثرة على الجملة المادية$\Sigma F_k^e \neq 0$ وإنما كان مجموع مساقط هذه القوى على ox معدوماً ،أي: $\Sigma F_{kX}^e = 0$؟

الجواب: من العلاقة الأولى نجد:

$$dQ_x = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_x = const \quad \Rightarrow \quad Q_{x0} = Q_{x1}$$

ومن العلاقة الثانية:

$$A_{x\,G} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{x\,G} = const \quad \Rightarrow V_{x\,G_2} = V_{x\,G\,1}$$

أي أن مسقط كمية الحركة على المحور OX ثابت.